0.1　容認写像

Definition 0.1.1

$p : E \longrightarrow X$ を fibration とする。$w : I \longrightarrow X$ で、$w(0) = x, w(1) = x'$ とおく。$H : F_x \times I \longrightarrow X$ を $H(y,t) = w(t)$ で定義する。このとき、$i : F_x \longrightarrow E$ を inclusion とすると、

$$\begin{tikzcd} F_x \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ F_x \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

の可換図式で CHP を用いると、

$$\begin{tikzcd} F_x \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ F_x \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

を可換とする $\widetilde{H} : F_x \times I \longrightarrow E$ このとき、$L_w = \widetilde{H}_1 : F_x \longrightarrow E$ が定義できるが、$p \circ L_w = x'$ であるため、$L_w : F_x \longrightarrow F_{x'}$ と考えられる。

この L_w の構成は以前の基点を取り替える操作を思い出せば、それと同じ事である。

Lemma 0.1.2

L_w は CHP における $\widetilde{H}$ のとり方によらず、homotopic を除いて一意に定まる。

proof)　　今回は基点が関係ないので CHP で誘導された写像はすべて i に homotopic である。

□

次の Lemma は以前、HEP で示した事を CHP で繰り返せば示せる。

Lemma 0.1.3

$w, w' : I \longrightarrow X$ において、$w \simeq w' \ \ \mathrm{rel}\ \ \partial I$ ならば、$L_w = L_{w'}$ である。

Lemma 0.1.4

$w : I \longrightarrow X$ が x への定置写像ならば、L_w は恒等射である。

Lemma 0.1.5

$w, w' : I \longrightarrow X$ に対し、$w(1) = w'(0)$ のとき、$(w * w')_\sharp = L_{w'} \circ L_w$

Remmark 0.1.6

$p : E \longrightarrow X$ が fibration とする。$x, x' \in X$ に対し、$\pi(x, x') \longrightarrow [F_x, F_{x'}]$ が $[w] \mapsto [L_w]$ の対応がある。

Proposition 0.1.7

$p : E \longrightarrow X$ を fibration とする。$w : I \longrightarrow X$ で、$w(0) = x, w(1) = x'$ とおく。このとき L_w は homotopy equivalence である。

proof)　　w の逆道 w^{-1} を考えたとき、$L_{w^{-1}}$ が L_w が homotopy inverce となる。

□

Definition 0.1.8

$p : E \longrightarrow X$ を fibration とする。$h : F_x \longrightarrow F_{x'}$ に対し、$w : I \longrightarrow X$ で $w(0) = x, w(1) = x'$ が存在し、$h \simeq L_w$ となるとき h を認容写像とよぶ。

また、空間 Y に対し、自明な fibration $Y \times F_x \longrightarrow Y$ を考え、$f : Y \longrightarrow X$ で $\tilde{f} : Y \times F_x \longrightarrow Y$ が存在し、

$$\begin{tikzcd} Y \times F_x \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

を満たし、任意の $y \in Y$ に対し、$\tilde{f}(y, \quad) : F_x \longrightarrow F_{f(y)}$ が認容写像のとき、$\tilde{f}$ は f の上の認容ファイバー写像と呼ぶ。

Proposition 0.1.9

$p : E \longrightarrow X$ を X が弧状連結な fibration とする。Y が可縮な空間とする。このとき、任意の $f : Y \longrightarrow X$ に対し、f の上の認容ファイバー写像が存在する。

proof) $x_0 \in X$ をとる。X が弧状連結なので、$\alpha : I \longrightarrow X$ で $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = f(y_0)$ となるものが存在する。よって、$\alpha_\sharp : F_{x_0} \longrightarrow F_{f(y_0)}$ を考える事ができる。また、Y が y_0 へ可縮であるため、

$$H : Y \times I \longrightarrow Y$$

で、$H(y,0) = y_0, H(y,1) = y$ が存在する。また、

$$G : Y \times F_{x_0} \times I \longrightarrow X \quad , \quad k : Y \times F_{x_0} \longrightarrow E$$

を $G(y,v,t) = f \circ H(y,t)$, $k(y,v) = \alpha_\sharp(v)$ とおくと、

$$G(y,v,0) = f \circ H(y,0) = f(y_0) = \alpha(1) = p \circ \alpha_\sharp(v) = p \circ k(y,v)$$

であるため、

$$\begin{tikzcd} Y \times F_{x_0} \arrow[r, "k"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times F_{x_0} \times I \arrow[r, "G"'] & X \end{tikzcd}$$

に対して、CHP を用いると、

$$\begin{tikzcd} Y \times F_{x_0} \arrow[r, "k"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times F_{x_0} \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & X \end{tikzcd}$$

を可換にする $H : Y \times F_{x_0} \times I \longrightarrow E$ が存在する。$H_1 = \tilde{f}$ で定義すれば、

$$p \circ \tilde{f}(y,v) = p \circ H(y,v,1) = G(y,v,1) = f(y)$$

であり、

$$\begin{tikzcd} Y \times F_{x_0} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

は可換である事がわかる。また、$\tilde{f} = H_1 \simeq H_0 = k$ よって、$\tilde{f}_{y_0} \simeq L_\alpha$ なので、$\tilde{f}$ は認容であることがわかる。

□

Definition 0.1.10

$p : E \longrightarrow X$ を fibration とするとき、$[\gamma] \in \pi_1(X)$ に対して、$L_\gamma : F \longrightarrow F$ が導かれるが、

$$L_{\gamma_*} : H_*(F) \longrightarrow H_*(F)$$

は γ の homotopy のみに依存する。よって、

$$\pi_1(X) \times H_*(F) \longrightarrow H_*(F)$$

を、$([\gamma], x) \mapsto L_{\gamma_*}(x)$ により定義すれば、これは作用となる。この作用が自明な場合、$p : E \longrightarrow X$ を可符号な fibration と呼ぶ。つまり、可符号であるとは任意の loop に対して、L_{γ_*} が恒等射にしかならないという事である。

Remmark 0.1.11

$p : E \longrightarrow X$ を fibration で X が単連結ならば、可符号である。

Lemma 0.1.12

$p : E \longrightarrow X$ を可符号な fibration とするとき、任意の許容写像 $g, h : F_x \longrightarrow F_{x'}$ に対し、

$$g_* = h_* : H_*(F_x) \longrightarrow H_*(F_{x'})$$

である。

proof)　仮定より、$\alpha, \beta : (I; 0, 1) \longrightarrow (X; x, x')$ が存在し、$L_\alpha \simeq g, L_\beta \simeq h$ となる。このとき、$\alpha * \beta^{-1} \in \pi_1(X, x)$ であり、可符号の仮定から

$$L_{\alpha * \beta^{-1}}{}_* = (L_{\beta^{-1}} \circ L_\alpha)_* = L_{\beta^{-1}}{}_* \circ L_{\alpha *} = 1$$

であり、一方 $L_{\beta^{-1}}$ は L_β の homotopy inverce であったから、

$$(L_{\beta^{-1}} \circ L_\beta)_* = L_{\beta^{-1}}{}_* \circ L_{\beta_*} = 1$$

これより、逆写像の一意性から、$L_{\alpha *} = L_{\beta_*}$ が成り立つ。つまり、$g_* = h_*$ である。

□